

Aufgaben zu Logarithmus-Gleichungen

Der entscheidende Trick ist, dass man auf beiden Seiten der Gleichung den Zehnerlogarithmus anwendet. Durch anschließende Verwendung der Potenzlogarithmusregel

$$\lg(a^n) = n \cdot \lg(a) \quad (1)$$

und Substitution mit

$$\lg x = y \quad (2)$$

erhält man lineare oder quadratische Gleichungen, die du sicher lösen kannst. Mache eventuell die Proberechnung, indem du die Ergebnisse in die ursprüngliche Gleichung einsetzt.

Aufg. 1

$$x^{\lg x} = 10^4 \quad | \quad \lg() \text{ wird auf beiden Seiten angewandt}$$

$$\lg(x^{\lg x}) = \lg(10^4)$$

$$(\lg x)(\lg x) = 4$$

$$(\lg x)^2 = 4$$

$$\text{Subst. } y = \lg x \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y_1 = 2 \quad \text{und} \quad y_2 = -2$$

$$\text{Resubst. } \lg x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 10^2 = 100 \quad \text{und} \quad \lg x_2 = -2 \Rightarrow x_2 = 10^{-2}$$

Aufg. 2

$$x^{1+\lg x} = 10^2 \quad | \quad \lg() \text{ wird auf beiden Seiten angewandt}$$

$$\lg(x^{1+\lg x}) = \lg(10^2)$$

$$\lg(x \cdot x^{\lg x}) = 2$$

$$\lg x + (\lg x)(\lg x) = 2$$

$$\text{Subst. } y = \lg x \Rightarrow y + y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y_1 = -2 \quad \text{und} \quad y_2 = 1$$

$$\text{Resubst. } \lg x_1 = -2 \Rightarrow x_1 = 10^{-2} = 0.01 \quad \text{und} \quad \lg x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 10$$

Aufg. 3

$$x^3 = 10x^{1+\lg x}$$

$$10x^{1+\lg x} = x^3 \quad | \quad \lg() \text{ wird auf beiden Seiten angewandt}$$

$$\lg(10x^{1+\lg x}) = \lg(x^3)$$

$$\lg 10 + \lg(x \cdot x^{\lg x}) = 3 \lg x$$

$$1 + \lg x + (\lg x)(\lg x) = 3 \lg x$$

$$\text{Subst. } y = \lg x \Rightarrow 3y = 1 + y + y^2 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Resubst. } \lg x = 1 \Rightarrow x = 10$$

Aufg. 4

$$10x^2 = x^{3+2\lg x} \quad | \quad \lg() \text{ wird auf beiden Seiten angewandt}$$

$$\lg(10x^2) = \lg(x^{3+2\lg x})$$

$$\lg 10 + \lg x^2 = \lg(x^3 \cdot x^{2\lg x})$$

$$\lg 10 + 2 \lg x = 3 \lg x + 2(\lg x)(\lg x) \quad | \quad - 3 \lg x$$

$$1 - \lg x = 2(\lg x)^2$$

$$\text{Subst. } y = \lg x \quad \Rightarrow \quad 1 - y = 2y^2 \Leftrightarrow 2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y_1 = -1 \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Resubst. } \lg x_1 = -1 \Rightarrow x_1 = 10^{-1} = 0.1 \quad \text{und} \quad \lg x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = 10^{0.5} = \sqrt{10}$$